ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΑ: ΣΗΜΕΙΩΤΙΚΕΣ, ΨΥΧΟΛΟΓΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΕΙΣ

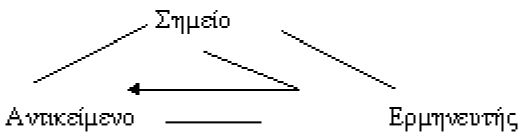
Χαράλαμπος Σακονίδης, Επίκουρος Καθηγητής, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

1.1 Η επικοινωνία στα μαθηματικά: μια σημειωτική προσέγγιση

Ο καθοριστικός ρόλος της επικοινωνίας στη δόμηση και ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και πράξης είναι πέρα από κάθε αμφισβήτηση. Η παρατήρηση μιας μαθηματικής δραστηριότητας ή ενέργειας σε οποιοδήποτε επίπεδο οδηγεί στη διαπίστωση ότι οι συμμετέχοντες εμπλέκονται σε μια διαδικασία επικοινωνίας, είτε ασχολούνται με τη μελέτη ή τη σύνταξη γραπτών κειμένων, που υπακούουν σε τυπικούς (formal) κανόνες, είτε συνδιαλέγονται μεταξύ τους προφορικά (άτυπη - informal - επικοινωνία), συζητώντας, χειρονομώντας, σχεδιάζοντας εικόνες/ διαγράμματα κτλ. Σε κάθε περίπτωση ο λόγος που παράγεται αποτελείται από μίξη λέξεων, προτάσεων και εκφράσεων της καθημερινής γλώσσας με μαθηματικά σημάδια, σημεία, σύμβολα, διαγράμματα και σχήματα, τα οποία χρησιμοποιούνται με κάποιο συστηματικό και από πριν συμφωνημένο τρόπο.

Το παραπάνω πλαίσιο αποτυπώνει τη γνωστή από τη βιβλιογραφία σχέση μεταξύ γλώσσας και μαθηματικών. Η σχέση αυτή μπορεί να ερμηνευτεί με δύο τρόπους, που ο ένας δεν αποκλείει τον άλλο: η γλώσσα μπορεί να θεωρηθεί ως αναπόσπαστο και σημαντικό μέρος της οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης ή τα μαθηματικά μπορούν να θεωρηθούν κατεξοχήν δραστηριότητα γλωσσικού χαρακτήρα. Η γλωσσική φύση των μαθηματικών έχει απασχολήσει αρκετούς ερευνητές στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ο Brown (1996) υποστηρίζει, για παράδειγμα, ότι τα μαθηματικά είναι μια γλώσσα, ο Pimm (1987) προσδιορίζει τη σχέση μεταξύ μαθηματικών και γλώσσας ως σχέση αναλογίας και ο Wittgenstein (1974) θεωρεί ότι η μαθηματική γνώση και αλήθεια βασίζονται σε γλωσσικές συμβάσεις. Ο Vile (1996) αποδίδει την έλλειψη συμφωνίας για τη διαλεκτική σχέση μαθηματικών/ γλώσσας στις διάφορες θεωρητικές προσεγγίσεις οι οποίες ανταγωνίζονται μέσα στο ίδιο οντολογικό πλαίσιο που συνίσταται στη διάκριση της εμπειρίας σε εσωτερική και εξωτερική. Ο ίδιος υιοθετεί την τριχοτόμηση της εμπειρίας που υιοθέτησε ο Peirce. Ο Peirce (1868), για να αντιμετωπίσει το διαχωρισμό του υποκειμενικού από το αντικειμενικό με έννοιες σημειωτικής, εισήγαγε μια τρίτη κατηγορία, την *αναπαράσταση (σημείο)* και υιοθέτησε την έννοια του *ερμηνευτή* ως το τρίτο στοιχείο στο σημειωτικό τρίγωνο (σχήμα 1).

«Ένα σημείο είναι κάτι που αντικαθιστά κάτι άλλο για κάποιον άνθρωπο μέσω κάποιας σχέσης ή ικανότητας. Απευθύνεται σε κάποιον, δηλαδή δημιουργεί στο νου αυτού του προσώπου ένα ισοδύναμο σημείο, ή ίσως ένα πιο αναπτυγμένο σημείο. Αυτό το σημείο που δημιουργεί το ονομάζω ερμηνευτή του πρώτου σημείου. Το σημείο παίρνει τη θέση κάποιου, του αντικειμένου» (Peirce 1955 στο Παπαγιώργης, επιμ. και μετφ., 1981).



Σχήμα 1: Το σημειωτικό τρίγωνο (Peirce, 1897 στο Vile 1996)

Η αξία του ορισμού αυτού εντοπίζεται στο ότι (i) συνδέει τα αντικείμενα του πραγματικού κόσμου με τα σημεία που τα αναπαριστούν, (ii) εξαρτά τη σημασία ενός σημείου από τη γνώση που έχει ο ερμηνευτής για τον κόσμο και από την ικανότητά του να ερμηνεύει νέα σημεία και (iii) ενεργοποιεί την έννοια της «πληροφορίας» δηλώνοντας ότι το αντικείμενο είναι εκείνο που επιβάλλει τη φόρμα του στο σημείο, καθορίζοντας έτσι τη δομή του.

Στο πλαίσιο αυτής της αντίληψης, κατά τον Vile, τα μαθηματικά αντιμετωπίζονται ως ανθρώπινη προσπάθεια που παρακινείται από το σημείο και επιτυγχάνεται με τη μεσολάβησή του˙ πρόκειται για διαδικασία αλληλεπίδρασης μεταξύ ατόμων και πολιτισμών στην προσπάθεια δημιουργίας μαθηματικών νοημάτων μέσα στο ιστορικό και κοινωνικό γίγνεσθαι και στο φως των εμπειριών μας γι' αυτό.

«Μια σημειωτική περιγραφή των μαθηματικών συνδέεται με μια οντολογία (και επιστημολογία) η οποία αντικαθιστά τη δυαδικότητα υποκείμενο- αντικείμενο με την τριαδικότητα σημείο- αντικείμενο- ερμηνευτής και με μια συσχετιζόμενη τριμερή διαίρεση της εμπειρίας. Θέλω να προτείνω ότι η υιοθέτηση αυτής της τριαδικής περιγραφής του τρόπου με τον οποίο αλληλεπιδρούν τα σημεία και ο κόσμος μπορεί να διαμορφώσει ένα πλαίσιο συζήτησης για τη φύση των μαθηματικών, της μαθηματικής δραστηριότητας (και της μαθηματικής εκπαίδευσης) το οποίο θα εξασφάλιζε ένα χώρο μεταφοράς (metaphorical space) όπου μπορούν να συνυπάρξουν οι φανερά διαφορετικές μεταξύ τους απόψεις για την κοινωνική και γλωσσική φύση των μαθηματικών» (Viele, 1996).

Η παραπάνω σημειωτική θεώρηση ενέχει το πλεονέκτημα της παρουσίασης των μαθηματικών ως μιας ανθρώπινης δραστηριότητας που εξελίσσεται ενεργητικά, η αντικειμενικότητα της οποίας δεν είναι προκαθορισμένη αλλά ερμηνεύεται τόσο στο ατομικό όσο και στο κοινωνικό επίπεδο και είναι προσβάσιμη μέσω των σημείων και των συμβόλων της.

1.2 Σημείο, σύμβολο και η σχέση τους με το αντικείμενο στα μαθηματικά

Από πολύ νωρίς η μαθηματική επιστήμη προχώρησε στην εισαγωγή και χρήση μιας μεγάλης ποικιλίας σημείων για την επεξεργασία και την ανάπτυξη των μαθηματικών ιδεών, καθιστώντας καθοριστικό το ρόλο τους στην περαιτέρω εξέλιξή της. Με το πέρασμα του χρόνου, μόνο ένας αριθμός τους επιβίωσε με κυριότερη αιτία, μεταξύ των άλλων, την ανταπόκριση στους νόμους της ευχρηστίας, της συνέπειας και της λειτουργικότητας. Η ενότητα αυτή εξετάζει τη σχέση μεταξύ σημείου και αντικειμένου με ιδιαίτερη αναφορά στα μαθηματικά.

Η μελέτη των σημείων σε οποιοδήποτε γνωστικό πεδίο προϋποθέτει τη διερεύνηση της φύσης της σχέσης μεταξύ σημείου και αντικειμένου. Ο Peirce (1955) διακρίνει τρεις τύπους σημείων με βάση αυτή τη σχέση: το *ομοίωμα* (όταν υπάρχουν κοινές ιδιότητες του σημείου και του αντικειμένου π.χ. ο χάρακας και η ευθεία γραμμή), το *δείκτη* (όταν η σχέση μεταξύ σημείου και αντικειμένου καθορίζεται από την επιρροή που ασκεί το αντικείμενο στο πλαίσιο που διαμορφώνεται, δηλαδή η σημασία της εξαρτάται από τα συν-κείμενα (context) π.χ. η πτώση του δείκτη ενός βαρομέτρου) και το *σύμβολο* (όταν η σχέση σημείου-αντικειμένου καθορίζεται συμβατικά π.χ. «5»). Αν και ο χώρος δεν επιτρέπει εκτεταμένη αναφορά στη σημειωτική του Peirce, γίνεται φανερό ότι το ομοίωμα αποτελεί τον απλούστερο τύπο σημείου και το σύμβολο τον πιο σύνθετο. Επιπλέον, υπάρχει μια σχέση εγκλεισμού μεταξύ των ομοιωμάτων, των δεικτών και των συμβόλων: κάθε δείκτης περιέχει ένα ομοίωμα και κάθε σύμβολο ένα δείκτη. Συνεπώς, στο πλαίσιο αυτό, το ομοίωμα συνδέει μία εικόνα με μία προηγούμενη, η οποία απλώνεται από το παρόν στο παρελθόν, ο δείκτης περικλείει μια συνέχεια που συνδέεται με το χαρακτήρα του πλαισίου που διαμορφώνεται, δηλαδή έχει το χαρακτήρα της παρούσας εμπειρίας και τέλος, το σύμβολο βιώνεται μόνο αν πληρούνται ορισμένες προϋποθέσεις και επομένως, σε σχέση με το ομοίωμα και το δείκτη, είναι ανεξάρτητο του χρόνου και του χώρου και γι' αυτό αποτελεί το πιο κυρίαρχο σημείο.

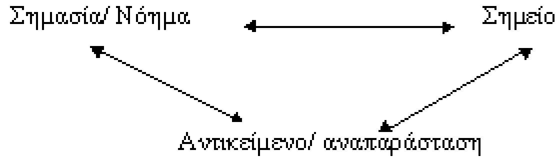
Την ίδια περίπου εποχή που γίνεται γνωστό το έργο του Peirce αλλά ανεξάρτητα από αυτό, ο Saussure (1974) καθιερώνει την επιστήμη της σημειολογίας ως τον κλάδο «που μελετά τη ζωή των (γλωσσικών) σημείων μέσα στην κοινωνία ... (που) φανερώνει από τι συγκροτούνται τα σημεία, ποιοι νόμοι τα διέπουν». Ο Saussure δεν ενδιαφερόταν για τα μη γλωσσικά σημεία, ωστόσο, η θεωρία του και ειδικότερα η διάκριση μεταξύ σημαινόμενου (signified) και σημαίνοντος (signifier) και η αρχή ότι η σχέση μεταξύ σημαινόμενου και σημαίνοντος είναι αυθαίρετη, επηρέασε ιδιαίτερα το πεδίο της σημειωτικής.

Αρκετά νωρίτερα ο Morris (1938), κινούμενος σε γενικές γραμμές στο ίδιο θεωρητικό πλαίσιο με τον Peirce, είχε θεωρήσει ότι το σύμβολο ως ειδική περίπτωση σημείου παράγεται συμβατικά και έχει μια συμβατική, συνήθως αυθαίρετη σχέση με αυτό που συμβολίζει. Όσον αφορά τη σχέση μεταξύ συμβόλου και αντικειμένου, ο Morris διακρίνει επίσης τα σύμβολα από τα ομοιώματα. Το γεγονός, για παράδειγμα, ότι τα γράμματα χ, ψ, z χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν μεταβλητές, ενώ τα γράμματα α, β, γ για να αναπαραστήσουν παραμέτρους είναι τελείως αυθαίρετο. Ωστόσο, το σημείο «>» στη σχέση «α>β» είναι ομοίωμα όσον αφορά τη σχέση διάταξης που αναπαριστά, ενώ η έκφραση «το α είναι μεγαλύτερο από το β» είναι και πάλι συμβολική.

Ο Chao (1968) εισάγει την ιδέα του «συμβόλου ενός συμβόλου» σύμφωνα με την οποία ένα σύμβολο μπορεί να συμβολίζει ένα άλλο. Για παράδειγμα, η γλώσσα είναι το σύμβολο των πραγμάτων, ενώ ο γραπτός λόγος είναι το σύμβολο της γλώσσας. Ο Chao κάνει δύο σημαντικές για τα μαθηματικά παρατηρήσεις: στην τυπική λογική και στα μαθηματικά είναι συχνά απαραίτητος ο επάλληλος συμβολισμός, για παράδειγμα, η καθημερινή γλώσσα σε ένα μετα-επίπεδο (μετα-γλώσσα) χρησιμοποιείται για να «μιλήσουμε» για τα μαθηματικά σύμβολα (πρώτης τάξης γλώσσα). Επιπρόσθετα, η διάκριση μεταξύ αντικατάστασης (ή μετονομασίας) και συμβολισμού είναι απαραίτητη π.χ. το σύμβολο Α στον τύπο της εύρεσης του εμβαδού ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου Α= π x μ δεν είναι σύμβολο για το σύμβολο π x μ, αλλά ένα άλλο σύμβολο γι' αυτό που συμβολίζεται από το π x μ.

Τα μαθηματικά, ως ο κατεξοχήν χώρος των σημείων και των συμβόλων, αποτέλεσαν πεδίο μελέτης πολλών θεωρητικών του είδους. Η Langer (1955) υποστηρίζει ότι «.. η μυστική δύναμη των μαθηματικών .. (βρίσκεται) .. στο γεγονός ότι ένας μαθηματικός δεν ισχυρίζεται ότι λεει κάτι για την ύπαρξη, την πραγματικότητα ή την αποτελεσματικότητα των πραγμάτων. Φροντίδα του είναι η δυνατότητα συμβολισμού των πραγμάτων και των πιθανών σχέσεών τους. Οι «οντότητές» του δεν είναι «δεδομένα» αλλά «έννοιες». Και ο Peirce (στο Eisele, 1964) υπογραμμίζει την εννοιολογική φύση των μαθηματικών θεωρώντας ότι όλα τα αντικείμενα του μαθηματικού συλλογισμού είναι υποθετικά. Ισχυρίζεται, ωστόσο, ότι τα αρχικά αντικείμενα του συλλογισμού είναι διαγραμματικά και οι διαδικασίες που εμπλέκονται σε αυτόν καθοδηγούνται από τους χειρισμούς αυτής της συγκεκριμένης αναπαράστασης. Κατά συνέπεια η φύση των μαθηματικών, κατά τον Peirce, είναι τόσο αντιληπτική όσο και εννοιολογική.

Ο Peirce διατυπώνει την άποψη ότι «όλη η σκέψη πραγματοποιείται με σημεία» και η *διαδικασία σημείωσης* (signing process) συνίσταται στην τριαδική συσχέτιση μεταξύ των (συγκεκριμένων) *αντικειμένων* που εμπλέκονται στο πρόβλημα, των *σημείων* που αναπαριστούν αυτά τα αντικείμενα και της απόδοσης *νοήματος* ή *σημασίας* στα σημεία. Το σημείο αντικαθιστά το αντικείμενο, αναφέρεται σε αυτό αλλά είναι περισσότερο διαθέσιμο από το ίδιο το αντικείμενο (Langer, 1955) (σχήμα 2).

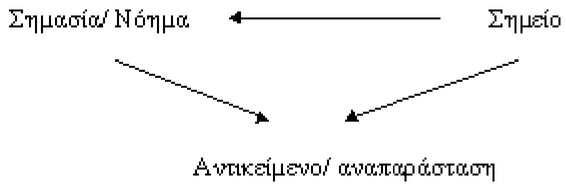


Σχήμα 2: Διαδικασία σημείωσης (Chaffe-Stengel και Noddings, 1982)

Κατά τη Langer, δεν υπάρχει κάποιος επιβεβλημένος, γραμμικός τρόπος μετάβασης από ένα στοιχείο της *διαδικασίας σημείωσης* σε άλλο. Στις περισσότερες περιπτώσεις τα στοιχεία συνυπάρχουν: τα σημεία χρησιμοποιούνται στη συγκεκριμένη (concrete) αναπαράσταση του προβλήματος για να «αιχμαλωτίσουν» τις σημαντικές, αμοιβαίες σχέσεις.

Η έννοια που αποδίδει η Langer στη *διαδικασία σημείωσης* διαφέρει από αυτήν των Huttenlocher και Higgins (1978 στο Chaffe-Stengel και Noddings, 1982). Οι τελευταίοι υποστηρίζουν ότι παρά το γεγονός ότι δεν υπάρχει κάποιος επιβεβλημένος, γραμμικός τρόπος μετάβασης από ένα στοιχείο της *διαδικασίας σημείωσης* σε άλλο, ωστόσο υπάρχει μια σειρά η οποία έχει καθιερωθεί από συνήθεια και έχει μεγαλύτερες πιθανότητες από κάθε άλλη να ενεργοποιήσει τα στοιχεία της *διαδικασίας σημείωσης* (Σχήμα 3).

Οι Huttenlocher και Higgins (1975) διακρίνουν τη διαδικασία σημείωσης από μια πλήρως αναπτυγμένη *διαδικασία συμβολισμού* (symbolic process) με βάση το γεγονός ότι στην τελευταία η λειτουργία των δεσμών συνίσταται στην ανάκληση των στοιχείων τα οποία συνδέονται. Η Langer (στο Chaffe-Stengel και Noddings, 1982) κάνει την ίδια διάκριση όταν γράφει: «τα σύμβολα δεν είναι πληρεξούσια των αντικειμένων αλλά οχήματα για τη σύλληψη των αντικειμένων.... τα σημεία ανακοινώνουν τα αντικείμενα (σε μας), ενώ τα σύμβολα (μας) οδηγούν στο να συλλάβουμε τα αντικείμενά τους». Ωστόσο, οι Huttenlocher και Higgins προχωρούν περισσότερο, καθώς θεωρούν ότι η διαδικασία συμβολισμού περιλαμβάνει μια αμετάβλητη λειτουργική σχέση ανάμεσα στα στοιχεία και άρα είναι διπλής κατεύθυνσης. Επομένως, ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβάνονται τη διαδικασία συμβολισμού είναι παρόμοιος με αυτόν της σημείωσης (σχήμα 2).

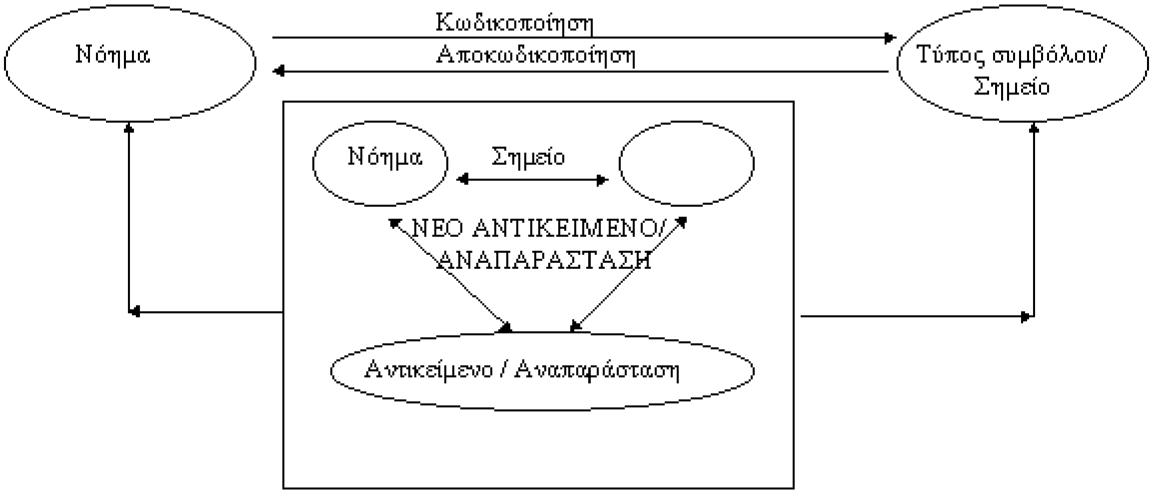


Σχήμα 3: Διαδικασία σημείωσης κατά Huttenlocher και Higgins (Chaffe-Stengel και Noddings, 1982)

Οι Chaffe-Stengel και Noddings συμφωνούν με το γεγονός ότι οι συμβολικές σχέσεις είναι, κατά κάποιο τρόπο, αμετάβλητες, θεωρούν, ωστόσο, ότι οι διαδικασίες συμβολισμού δε διαφέρουν πολύ από αυτές της σημείωσης. Συγκεκριμένα υποστηρίζουν ότι η διαδικασία συμβολισμού είναι ριζωμένη και απορρέει από τη διαδικασία σημείωσης. Εξετάζοντας το σχήμα που προτείνεται από τους ίδιους (βλ. σχήμα 4) διαφαίνεται ότι:

- ο πυρήνας της διαδικασίας συμβολισμού εντοπίζεται σε μια αμετάβλητη, ένα-προς-ένα συσχέτιση του σημείου με το αντικείμενο, η οποία διατηρείται κατά τη διάρκεια επαναλαμβανόμενων διαδικασιών συμβολισμού,
- η συμβολική κατανόηση στηρίζεται σε διαδικασίες σημείωσης,
- η συμβολική κατανόηση αυξάνεται με επαναλαμβανόμενες επεκτάσεις της βασικής τριαδικής σχέσης που συνδέει σημείο, αντικείμενο και σημασία,
- διαδοχικές επαναλήψεις πάνω στην αρχική διαδικασία σημείωσης ενοποιούν το νέο σύμβολο σε κάποια υπάρχουσα συμβολική κατανόηση, θέτοντας το νέο σύμβολο σε αντίθεση και σύγκριση με υπάρχοντα σύμβολα και
- διαδοχικές επαναλήψεις πάνω στην αρχική διαδικασία σημείωσης επιφέρουν μικρές διαφοροποιήσεις στο αρχικό νόημα που επιτεύχθηκε στο επίπεδο της σημείωσης.

Οι Chaffe-Stengel και Noddings περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποίησαν την παραπάνω σημειωτική ανάλυση για να διδάξουν τη συμβολική κατανόηση των ρητών αριθμών και συγκεκριμένα την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων. Μέσα από μια ακολουθία εννοιών, οι οποίες διευκολύνουν τη μετάβαση από τις πράξεις με φυσικούς αριθμούς στις πράξεις με κλάσματα και με την ανάδειξη κατά τη διαδικασία του γεγονότος ότι οι πράξεις είναι συνεπείς/ σταθερές σε όλη την τάξη των ρητών αριθμών, οι συγγραφείς πιστεύουν ότι οι μαθητές που έχουν επιτύχει τη συμβολική ενοποίηση των φυσικών αριθμών ενθαρρύνονται να χρησιμοποιήσουν αυτό το είδος κατανόησης για να διευκολυνθούν στην κατανόηση όλων των ρητών αριθμών.



Σχήμα 4: Αναπαράσταση της διαδικασίας συμβολισμού (Chaffe-Stengel και Noddings, 1982)

Στην ενότητα αυτή εξετάστηκε η σχέση μεταξύ σημείων και συμβόλων και η σχέση των διαδικασιών σημείωσης και συμβολισμού. Η πληθώρα σημείων και κυρίως συμβόλων που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά αποδίδει κεντρικό ρόλο στην ικανότητα χειρισμού τους ως προς την κατανόηση του αντικειμένου. Ο επιτυχής χειρισμός ενός μαθηματικού συμβόλου προϋποθέτει τη σύνδεση από το χρήστη του συμβόλου με κάποιο νόημα μέσα από τη διαδικασία συμβολισμού και σε τέτοιο βαθμό γενίκευσης, ώστε το σύμβολο δεν είναι απλώς ένα σημαίνον ενός αντικειμένου αλλά μετατρέπεται το ίδιο σε αντικείμενο για χειρισμό. Στην επόμενη ενότητα εξετάζεται ο ρόλος των μαθηματικών συμβόλων στην κατανόηση και στη μάθηση των σχολικών μαθηματικών.

1.3 Τα σύμβολα και ο ρόλος τους στην κατανόηση των μαθηματικών: ψυχολογικές και παιδαγωγικές απόψεις

Ο μαθηματικός συμβολισμός αποτελεί ένα από τα ισχυρότερα μέσα έκφρασης των μαθηματικών. Η χρήση συμβόλων για την αναπαράσταση των μαθηματικών ιδεών συνέβαλε σημαντικά στη εντυπωσιακή εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης, εφοδιάζοντας τη σκέψη με ένα ευέλικτο και οικονομικό εργαλείο. Η εκτεταμένη αυτή χρήση συμβόλων στα μαθηματικά επηρέασε το περιεχόμενο και τη διδασκαλία του μαθήματος στο σχολείο. Από τα πρώτα χρόνια και με την πάροδο του χρόνου, τα παιδιά γνωρίζονται μ' ένα σημαντικό αριθμό συμβόλων. Η έρευνα έχει επανειλημμένα ασχοληθεί με αυτό το κομμάτι των σχολικών μαθηματικών, εστιάζοντας το ενδιαφέρον στα χαρακτηριστικά του μαθηματικού συμβολισμού και στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί χειρίζονται το συμβολικό σύστημα των μαθηματικών.

Ο Skemp (1971) γράφει ότι «η χρήση των συμβόλων είναι εκείνη με την οποία επιτυγχάνουμε τον εθελοντικό έλεγχο της σκέψης» και αποδίδει στο μαθηματικό συμβολισμό έναν αριθμό λειτουργιών, όπως επικοινωνία, ταξινόμηση, επεξήγηση, διευκόλυνση διαλογισμού, αυτοματοποίηση συχνά επαναλαμβανόμενων χειρισμών, κατανόηση, κάθε δημιουργική διανοητική δραστηριότητα κτλ. Υποστηρίζει ότι τα σύμβολα λειτουργούν ως γέφυρες μεταξύ των σκέψεων και του εξωτερικού κόσμου και δανείζεται από τον Chomsky τους όρους «επιφανειακή δομή (surface structure)» και «βαθιά δομή (deep structure)» για να αναπαραστήσει τους δύο αυτούς κόσμους αντίστοιχα. Επεκτείνοντας αυτήν την αντίληψη, οι Byers και Erlwanger (1984) αναπτύσσουν την άποψη ότι τα μαθηματικά ως επιστημονικός κλάδος διακρίνονται από μια δυαδικότητα, αυτήν του «περιεχομένου» και της «φόρμας». Η τελευταία εξελίσσεται και αλλάζει εξαιτίας της ανάγκης να εκφράσει τις ιδιότητες ενός «αυξανόμενου αποθεματικού μαθηματικών αντικειμένων». Κεντρικό σημείο της μαθηματικής δραστηριότητας αποτελεί η ικανότητα χειρισμού συμβόλων και η ταυτόχρονη διατήρηση της συνειδητοποίησης των εννοιών που δηλώνουν αυτά τα σύμβολα. Για το λόγο αυτό, η επιτυχία ενός παιδιού στα μαθηματικά εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ικανότητά του να ελέγχει πλήρως τόσο το περιεχόμενο όσο και τη φόρμα, ενώ ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να είναι σε θέση να εκτιμήσει τους ρόλους και των δύο και τις μεταξύ τους σχέσεις. Πιθανή αποτυχία του παιδιού να διακρίνει τη διαφορά μεταξύ περιεχομένου και φόρμας μπορεί να προκαλέσει σύγχυση. Οι Byers και Erlwanger συμπεραίνουν ότι το σχολείο θα πρέπει να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν ευχέρεια στους χειρισμούς των συμβόλων, με δεδομένο, ωστόσο, το γεγονός ότι η μάθηση της φόρμας κατέχει πρωτεύουσα θέση στη διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών, δε θα πρέπει να τους δοθεί η εντύπωση ότι οι κανόνες που αφορούν τη φόρμα και τη δομή αποτελούν την ουσία των μαθηματικών. Είναι πιθανό η αδυναμία πολλών παιδιών να εκτιμήσουν τους ρόλους του περιεχομένου και της φόρμας και την αλληλεπίδρασή τους στο πλαίσιο των μαθηματικών να αποτελεί έναν από τους βασικούς λόγους αποτυχίας τους στα μαθηματικά.

Σε μεταγενέστερο άρθρο του ο Skemp (1982) υιοθετεί τον όρο «συμβολική κατανόηση» (symbolic understanding) για να αναφερθεί στην κατανόηση που αφορά την ικανότητα της σύνδεσης των μαθηματικών συμβόλων με τις αντίστοιχες μαθηματικές ιδέες [την οποία οι Byers και Herscovics (1977) αποκαλούν «τυπική κατανόηση» (formal understanding)]. Ο Skemp διευκρινίζει ότι η λέξη «συμβολική» δεν αναφέρεται σε ένα μοναδικό σύμβολο αλλά σε ένα συμβολικό σύστημα, δηλαδή σε ένα σύνολο συμβόλων που αντιστοιχούν σε ένα σύνολο εννοιών μαζί με σχέσεις μεταξύ των συμβόλων, οι οποίες με τη σειρά τους αντιστοιχούν σε σχέσεις μεταξύ των εννοιών. Για παράδειγμα, η θέση και το μέγεθος των ψηφίων «2» και «3» στις παρακάτω συμβολικές αναπαραστάσεις καθορίζουν τις σχέσεις μεταξύ των εννοιών που αναπαριστούν: 23, 2^3. Τελικά, ο Skemp υιοθετεί τον εξής ορισμό για τη συμβολική κατανόηση: είναι η αμοιβαία αφομοίωση μεταξύ ενός συστήματος συμβόλων και μιας κατάλληλης εννοιολογικής δομής. Τονίζει, ωστόσο, ότι η εννοιολογική δομή είναι σημαντικό να μην κυριαρχείται από το σύστημα συμβόλων, καθώς η ισχύς των μαθηματικών βρίσκεται στις ιδέες. Με την κατάλληλη συνεργασία των δύο, τα σύμβολα υποστηρίζουν τη χρήση αυτής της ισχύος μέσω της αξιοποίησης των ιδεών αυτών στην πληρότητά τους. Σε περιπτώσεις ισομορφισμού, ελάχιστη σημασία έχει η κυριαρχία του ενός στοιχείου έναντι του άλλου. Στα μαθηματικά, ο ισομορφισμός μεταξύ συμβολικού συστήματος και εννοιολογικής δομής είναι, στις περισσότερες περιπτώσεις, τοπικού μόνο χαρακτήρα. Για παράδειγμα, η χωρική σχέση «βρίσκεται δεξιά από» έχει διαφορετική σημασία σε κάθε μία από τις παρακάτω συμβολικές αναπαραστάσεις: 23, 21/3, 2α, ενώ η αναπαράσταση (2,3) έχει τρεις διαφορετικές ερμηνείες: ρητός αριθμός, σημείο στο επίπεδο και ελεύθερο διάνυσμα. Αυτό οφείλεται κυρίως στις πολύ περιορισμένες δυνατότητες διευθέτησης των συμβόλων αναφορικά με τις πολλές σχέσεις που αναπτύσσονται μεταξύ των μαθηματικών ιδεών και λιγότερο σε ενδεχόμενα λανθασμένη επιλογή συμβολικού συστήματος. Ο Skemp υποστηρίζει ότι οποιαδήποτε επικοινωνία, προφορική ή γραπτή γίνεται αντιληπτή αρχικά από ένα σύστημα συμβόλων. Για να γίνει κατανοητή (δηλαδή να συσχετιστεί εννοιολογικά), πρέπει να «προσελκυστεί» από κάποια εννοιολογική δομή και να ερμηνευτεί με βάση τις σχέσεις της εννοιολογικής, κυρίως, δομής και λιγότερο αυτές του συμβολικού συστήματος. Αυτό απαιτεί ισχυρές εννοιολογικές δομές και κυρίως αρκετά δυνατούς δεσμούς μεταξύ του συμβολικού συστήματος και της εννοιολογικής δομής, έτσι ώστε να πραγματοποιηθεί η μετάβαση από το ένα σύστημα στο άλλο.

Σε μία ενδιαφέρουσα ανταλλαγή απόψεων για το ρόλο των μαθηματικών συμβόλων στη μάθηση και διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών μέσα από τις σελίδες του περιοδικού «Mathematics Teaching» της Μεγάλης Βρετανίας, ο Tahta (1985) διατυπώνει μια ενδιαφέρουσα όσο και προκλητική σε σχέση με τα παραπάνω θέση. Συγκεκριμένα, θεωρεί ως σημαντική για την κατανόηση των μαθηματικών από τα παιδιά την απόκτηση ευχέρειας στο χειρισμό των μαθηματικών συμβόλων, ανεξάρτητα από οποιαδήποτε συσχετιζόμενα εξωτερικά νοήματα. Αντιδρώντας σε αυτήν τη θέση, η Liebeck (1986) υπερασπίζεται το ρόλο της εμπειρίας στη μάθηση των μαθηματικών, αντιπροτάσσοντας ένα μοντέλο ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών, σύμφωνα με το οποίο η εμπειρία έρχεται πρώτη, ακολουθεί η γλώσσα, στη συνέχεια η εικόνα και στο τέλος το σύμβολο. Συμμετέχοντας στη συζήτηση, ο Pimm (1986) επικρίνει τη θέση της Liebeck, η οποία διαχωρίζει τη γλώσσα από την εμπειρία. Τονίζει το γλωσσικό χαρακτήρα των μαθηματικών, διατυπώνοντας τη θέση ότι εκείνο που συχνά απαιτείται από το μαθητή είναι να κατανοήσει τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιείται ένα γλωσσικό σχήμα. Το γεγονός ότι τα παιδιά, από πολύ μικρή ηλικία, κατέχουν ένα σημαντικό μέρος της μητρικής τους γλώσσας φανερώνει ότι είναι σε θέση να διερευνήσουν και να υιοθετήσουν ένα αντίστοιχο σύστημα «πριν προσεγγίσουν τον πιο δύσκολο στόχο της κατανόησης της σχέσης του με τον εξωτερικό κόσμο». Αυτό ενισχύει τη θέση σύμφωνα με την οποία « η διδασκαλία που στοχεύει στην κατανόηση περιλαμβάνει την ευχέρεια χειρισμού η οποία δεν είναι απαραίτητο να ακολουθήσει την απόκτηση νοήματος» (Pimm, 1986).

Η Sesay (1982) αναφέρεται στο ίδιο θέμα της σχέσης μεταξύ συμβόλων και μαθηματικών ιδεών/ αντικειμένων στα πλαίσια της σχολικής πρακτικής και υποστηρίζει ότι για να μπορεί ένα παιδί να αντιμετωπίσει μια συμβολική πρόταση, θα πρέπει να είναι σε θέση: (i) να χειριστεί τα σύμβολα, (ii) να συνειδητοποιήσει τη μεταξύ τους σχέση και (iii) να μεταφέρει αυτές τις δραστηριότητες στο επίπεδο των μαθηματικών ιδεών τις οποίες αναπαριστούν τα σύμβολα. Στην τελευταία διαδικασία, το παιδί πρέπει να αντιστοιχίσει τα σύμβολα με αυτές τις ιδέες, με τον κίνδυνο ανεξαρτητοποίησης των συμβόλων από τα αντικείμενα που η Sesay αποκαλεί έλλειψη «εξωτερικής σταθερότητας» (αναφέρεται στη σταθερότητα μεταξύ των μαθηματικών ιδεών και του συστήματος των συμβόλων).

Για πολλά χρόνια, ο χειρισμός των μαθηματικών συμβόλων κατείχε κεντρική θέση στη διδασκαλία των μαθηματικών. Τα τελευταία χρόνια, ωστόσο, η έρευνα έστρεψε την προσοχή των εκπαιδευτικών στη σημασία που έχει για τη μάθηση των μαθηματικών η κατανόηση των μαθηματικών αντικειμένων, στα οποία αναφέρονται τα σύμβολα. Ωστόσο, ακόμη και σήμερα, τα μαθηματικά σύμβολα έχουν λίγο ή καθόλου νόημα για πολλούς μαθητές. Εντοπίζοντας αυτό το πρόβλημα, ο Arcavi (1994) υποστηρίζει ότι η μαθηματική εκπαίδευση θα πρέπει να καλλιεργήσει αυτό που αποκαλεί «αντίληψη συμβόλου» (symbol sense), δηλαδή «μια σύνθετη και πολύπλευρη 'αίσθηση' για τα σύμβολα ...μια γρήγορη ή ακριβή αναγνώριση, κατανόηση ή αντίληψη των συμβόλων». Ο Arcavi δεν επιχειρεί να διατυπώσει έναν ακριβή ορισμό του όρου αλλά προσπαθεί να περιγράψει συμπεριφορές οι οποίες αποτελούν παραδείγματα της «αντίληψη συμβόλου» όπως:

- κατανόηση της δύναμης των συμβόλων, δηλαδή πότε και πού μπορούν να χρησιμοποιηθούν,
- συναίσθηση της λειτουργικότητας των συμβόλων έναντι άλλων προσεγγίσεων,
- ικανότητα χειρισμού αλλά και «ανάγνωσης» των συμβόλων ως δύο συμπληρωματικών πλευρών της λύσης προβλημάτων,
- ικανότητα επιλογής ενός μαθηματικού συμβολισμού αλλά και απόρριψής του προς όφελος της επίλυσης του προβλήματος,

- συνειδητοποίηση της ανάγκης ελέγχου της σημασίας/νοήματος του συμβόλου κατά την επίλυση του προβλήματος,
- αντίληψη του διαφορετικού ρόλου που μπορούν να διαδραματίσουν τα σύμβολα σε διαφορετικά πλαίσια.

Κατά τον Arcavi, η «αντίληψη συμβόλου» αποτελεί συστατικό της ευρύτερης διαδικασίας απόδοσης νοήματος στα μαθηματικά, και συνιστά το βασικότερο στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης, γι' αυτό θα πρέπει να γίνει αναπόσπαστο μέρος των μαθηματικών εργαλείων τόσο του μαθητή όσο και του εκπαιδευτικού, έτοιμο να ενεργοποιηθεί όταν χρειαστεί. Σε διδακτικό επίπεδο, αυτό σημαίνει τη συγκρότηση μαθηματικών δραστηριοτήτων οι οποίες, μέσα από κατάλληλες προσεγγίσεις παρέχουν στους μαθητές ευκαιρίες διαμόρφωσης της «αντίληψης συμβόλου».

Συνοψίζοντας, ο ρόλος των συμβόλων στις διαδικασίες μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών χρήζει ειδικής μελέτης. Είναι δυνατό για ένα μαθητή να επιτύχει στα μαθηματικά μαθαίνοντας απλώς να χειρίζεται τα μαθηματικά σύμβολα, χωρίς να τα κατανοεί. Ωστόσο, προτεραιότητα για το παιδί αποτελεί η κατανόηση του νοήματος των ιδεών, παράλληλα ή ταυτόχρονα με την ικανότητα χειρισμού των συμβολικών τους αναπαραστάσεων. Παρόλα αυτά, στο σημερινό σχολείο συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο. Τα παιδιά συχνά μαθαίνουν πώς να χειρίζονται «ετικέτες» χωρίς περιεχόμενο. Αυτό επιτυγχάνεται σύντομα και με ευκολία, αλλά είναι ιδιαίτερα προβληματικό σε μακροπρόθεσμη βάση.

1.4 Αντί συμπεράσματος

Στις προηγούμενες σελίδες επιχείρησα να σκιαγραφήσω ένα σημειωτικό πλαίσιο ερμηνείας των σημείων και κυρίως των συμβόλων στα μαθηματικά, θεωρώντας ότι ένα τέτοιο πλαίσιο θα μπορούσε να συμβάλει ουσιαστικά στην καλύτερη μελέτη του ρόλου και της λειτουργίας των μαθηματικών συμβόλων στην κατανόηση των μαθηματικών.

Η έρευνα στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης εντόπισε από νωρίς τη διαφορά μεταξύ της κατανόησης των μαθηματικών και της ικανότητας χειρισμού των μαθηματικών συμβόλων από τους μαθητές. Επιστρατεύοντας ψυχολογικές και παιδαγωγικές απόψεις, οι λόγοι αυτής της διαφοράς αναζητήθηκαν είτε στα χαρακτηριστικά του συστήματος των μαθηματικών συμβόλων, είτε στη χαλαρή (ή ανύπαρκτη) σύνδεσή τους με τις ιδέες που αναπαριστούν. Είναι φανερό ότι μια τέτοια προσέγγιση αγνοεί την ιστορική και κοινωνική διάσταση της συγκρότησης νοήματος στα μαθηματικά μέσω των συμβόλων.

Στο σημειωτικό πλαίσιο, σε κάθε πράξη σημείωσης, δηλαδή σε κάθε αλληλεπίδραση σημείου- αντικειμένου-ερμηνευτή, ο ερμηνευτής γίνεται ένα σημείο ή ένα αντικείμενο (με τη σημειωτική σημασία) σε μία νέα πράξη σημείωσης. Έτσι, παράγεται μια αλυσίδα ερμηνευτών που μεταφέρει νοήματα, οι συνδέσεις της οποίας γίνονται όλο και πιο αδιαφανείς. Αυτό συνεπάγεται ότι το νόημα ενός σημείου βρίσκεται με αναφορά στο προηγούμενο σημείο της αλυσίδας. Επιπλέον, ένα σημείο δεν είναι αρκετό να θεωρηθεί απλά ως ένα αντικείμενο, είναι ένα αντικείμενο σε ένα σύστημα με κανόνες χειρισμού, οι οποίοι προκύπτουν ακριβώς από τη φύση αυτού του αντικειμένου. Τελικά, ένα σημείο/σύμβολο περιέχει νόημα, τεχνική και ένα πρόσφατο ιστορικό σύνδεσης με άλλα σημεία, καθώς και μια εν δυνάμει (ενδεχόμενη) αδιαφάνεια. Η υιοθέτηση αυτού του τρόπου ερμηνείας των συμβόλων διαμορφώνει ένα πλαίσιο μελέτης του ρόλου τους στην απόδοση του μαθηματικού νοήματος και, κατά συνέπεια, στα μαθηματικά και στη μαθηματική εκπαίδευση, το οποίο λαμβάνει υπόψη του την ιστορική και κοινωνική διάσταση της φύσης των μαθηματικών, που η σχετική έρευνα έχει μέχρι τώρα αγνοήσει. Μία τέτοια φιλόδοξη προσέγγιση προϋποθέτει αρχικά την επίλυση ενός αριθμού εννοιολογικών και μεθοδολογικών προβλημάτων. Ωστόσο, θα μπορούσε να είναι ιδιαίτερα καρποφόρα σε επίπεδο μαθησιακών και διδακτικών πρακτικών για τη μαθηματική εκπαίδευση.

Βιβλιογραφία

Arcavi, A. (1994) «Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics», *For the Learning of Mathematics*, 14 (3).

Brown, A. (1996) «Mathematics Language and Derrida», Paper presented at the May meeting of the British Society for the Research in the Learning of Mathematics, Loughborough, UK.

Byers, V. and Erlwanger, S. (1984) «Content and Form in Mathematics», *Educational Studies in Mathematics*, No 15.

Byers, V. and Herscovics, N. (1977) «Understanding school Mathematics», *Mathematics Teaching*, No 81.

Chao, Y. R. (1961) «Graphic and Phonetic Aspects of Linguistic and Mathematical Symbols», *Proceedings of Symbosia in Applied Mathematics*, Vo XII.

Chaffe-Stengel, P. and Noddings, N. (1982) «Facilitating Symbolic Understanding of Fractions», *For the Learning of Mathematics*, 3(2).

Eisele, C. (1964) «Peirce's philosophy of education in his unpublished mathematics textbooks». In E. Moore and R. Robin (eds), *Studies in the philosophy of Charles Sanders Peirce*, Second Series, Amherst:The University of Massachusetts Press.

Huttenlocher, J. and Higgins, E.T. (1978) «Issues in the study of symbolic development». In W.A. Collins (ed*),* *Minnesota Symbosia on Child Psychology*, Vo II, Lawrence Erlbaum Associates.

Langer, S. (1955) *Philosophy in a New Key*, NY: Mentor Books.

Liebeck, P. (1986) «In defence of experience», *Mathematics Teaching*, No 114.

Peirce, C.S. (1868) «On a New List of Categories», *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 7.

Morris, C. (1938) Foundations of the theory of signs, Chicago.
Peirce, C. (1955) «Logic as Semiotic: the theory of signs». Στο Κ. Παπαγιώργης (επ. και μετ.) (1981) *Κείμενα Σημειολογίας*, εκδόσεις Νεφέλη.
Pimm, D. (1986) «Beyond Reference», *Mathematics Teaching*, No 116.
Pimm, D. (1987) *Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms*, London: Routledge and Kegan Paul.
Skemp, R. (1971) *The Psychology of Learning Mathematics*, Penguin.
Skemp, R. (1982) «Symbolic Understanding», *Mathematics Teaching*, No 99.
Saussure, F. (1974) Course in General Linguistics, Fontana.
Sesay, M. (1982) «On the stability of symbols for the learning and teaching of Mathematics», *For the Learning of Mathematics*, Vo 3.2, No 3.
Tahta, D.G. (1985) «On Notation», *Mathematics Teaching*, No 112.
Vile, A. (1996) «Peirce, the Interpretant (a tripartie division of experience) and Mathematical Meaning», *Proceedings of 8th International Conference on Mathematical Education*, Working Group 10: Mathematics and Languages, Seville, Spain.
Wittgenstein, L. (1974) *Philosophical Grammar*, Basil Blackwell, UK.